MECANIQUE 1991

C.E.S.T.I

Repère <0> = $(O_1|\vec{I}\ \vec{j}\ \vec{k})$; $\overrightarrow{O_1O_2} = h\,\vec{I}$, h longueur invariable donnée.

Repère <1> = $(O_1|\vec{I}_1\ \vec{j}_1\ \vec{k})$; $(\vec{I}, \vec{I}_1) = (\vec{j}, \vec{j}_1) = \alpha_1$ fonction de t.

Repère <2> = $(O_2|\vec{I}_2\ \vec{j}_2\ \vec{k})$; $(\vec{I}, \vec{I}_2) = (\vec{j}, \vec{j}_2) = \alpha_2$ fonction de t.

α_1 et α_2 admettent par rapport au temps des dérivées premières (α_1', α_2'), secondes (α_1'', α_2'').

QUESTION 1.

On suppose dans cette question (et uniquement dans cette question) que $\alpha_2' = \alpha_1'$; caractériser avec précision le mouvement du repère <2> par rapport au repère <1>.

Dans la suite du problème on suppose α_1' positif, α_2' négatif.

On note :

$\vec{v}^{<\lambda>}(M)$ le vecteur vitesse de M dans un repère <λ>;

$\vec{\gamma}^{<\lambda>}(M)$ le vecteur accélération de M dans <λ>;

I le centre instantané de rotation mutuel des plans $(O_1|\vec{I}_1\ \vec{j}_1)$ et $(O_2|\vec{I}_2\ \vec{j}_2)$, c'est-à-dire le point qui, à toute date, satisfait à la propriété $\vec{v}^{<1>}(I) = \vec{v}^{<2>}(I)$.

QUESTION 2.

a) Déterminer en fonction de h, α_1', α_2' les bipoints $\overrightarrow{O_1I}$ et $\overrightarrow{O_2I}$ par leurs composantes sur les axes du repère <0> ; exprimer ensuite $\overrightarrow{O_1I}$ par ses composantes sur les axes de <1> et $\overrightarrow{O_2I}$ par ses composantes sur les axes de <2>.

b) Calculer, par leurs composantes sur les axes du repère <0>, les vecteurs $\vec{v}^{<0>}(I)$ et $\vec{v}^{<1>}(I) = \vec{v}^{<2>}(I)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

c) Après avoir calcule : $\vec{v}^{<0>}(I) - \vec{v}^{<1>}(I)$ ou $\vec{v}^{<0>}(I) - \vec{v}^{<2>}(I)$

interpréter le terme : $\dfrac{h\,\alpha_1'\,\alpha_2'}{\alpha_2' - \alpha_1'}\,\vec{j}$

QUESTION 3.

On impose que la trajectoire de I dans le repère <1> soit la courbe C_1 constituée de trois arcs K_1, K_1^*, K_1^{**} ; K_1^* se déduit de K_1 par la rotation $(O_1, \frac{2\pi}{3})$; K_1^{**} se déduit de K_1^* par la rotation $(O_1, \frac{2\pi}{3})$; K_1 est symétrique par rapport à l'axe $(O_1|\vec{I}_1)$; K_1 est défini en coordonnées polaires (r, θ) d'axe polaire $(O_1|\vec{I}_1)$ par :

$$r = ae^{\theta \operatorname{cotg} V} \quad ; \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$$

a longueur invariable donnée, V angle invariable : $0 < V < \frac{\pi}{2}$

a) Dessiner l'arc K_1 puis la courbe C_1 ; on désigne par A_1 le point de K_1 d'angle polaire nul $\overrightarrow{O_1A_1} = a\vec{I}_1$, par B_1 le point de K_1 d'angle polaire égal à $\frac{\pi}{3}$; déterminer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{A_1B_1}$ de K_1, ainsi que les longueurs des arcs $\overset{\frown}{A_1I}$ et $\overset{\frown}{IB_1}$, I étant le point de K_1 d'angle polaire θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{3}$). Quel est le centre de courbure de K_1 en I ?

b) On propose d'étudier le mouvement de I sur sa trajectoire C_1 dans l'intervalle de temps (0, T) où α_1 croit de $\frac{-\pi}{3}$ à 0 :

$$\alpha_1(0) = \frac{-\pi}{3}\ , \quad \alpha_1(T) = 0$$

déterminer les vecteurs $\vec{v}^{<0>}(I)$, $\vec{\gamma}^{<0>}(I)$; $\vec{v}^{<1>}(I)$, $\vec{\gamma}^{<1>}(I)$,

puis séparer $\vec{\gamma}^{<1>}(I)$ en accélération tangentielle et accélération normale.

c) Déterminer la trajectoire de I dans <2> au cours de l'intervalle (0, T) ; exprimer le bipoint $\overrightarrow{O_2I}$ en fonction de α_2 en supposant qu'aux dates extrêmes, on a :

$$\alpha_2(0) = \pi, \quad \alpha_2(T) = \frac{2\pi}{3}$$

On notera A_2 la situation de I à la date 0 sur cette trajectoire C_2.

Déterminer $\vec{\gamma}^{<2>}(I)$: puis séparer $\vec{\gamma}^{<2>}(I)$ en accélération tangentielle et accélération normale.

A SUIVRE

Calculer la différence $\vec{\gamma}^{<1>}(I) - \vec{\gamma}^{<2>}(I)$ et montrer qu'elle fait intervenir les courbures de C_1 et C_2 en I.

QUESTION 4.

On impose que la trajectoire de I dans le repère <1> soit la courbe C_1 constituée d'arcs dont l'un est K_1 qui est défini en coordonnées polaires (r, θ) d'axe polaire $(O_1|\vec{I}_1)$ par :

$$r = f(\theta) \; ; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_m \leqslant \pi \; ; \qquad \theta_m \text{ donné}$$

a) Montrer que si la trajectoire correspondante K_2 de I dans le repère <2> est la courbe définie en coordonnées polaires (R, ε) d'axe polaire $(O_2|\vec{I}_2)$ par :

$$R = g(\varepsilon)$$

alors R et $\frac{d\varepsilon}{d\theta}$ peuvent être exprimés en fonction de θ.

b) On pose $\frac{df}{d\theta} = f_1$, $\frac{df_1}{d\theta} = f_2$; déterminer en fonction de $(f, f_1, f_2, \theta', \theta'')$ l'expression de $\vec{\gamma}^{<1>}(I)$ par ses composantes sur $(\vec{I}, \vec{J})$; θ' et θ" sont les dérivées première et seconde de θ par rapport au temps.

Séparer cette expression en accélération tangentielle et accélération normale.

c) Déterminer l'expression de $\vec{\gamma}^{<2>}(I)$ par ses composantes sur $(\vec{I}, \vec{J})$. Séparer cette expression en accélération tangentielle et accélétation normale.

d) Déterminer la différence $\vec{\gamma}^{<1>}(I) - \vec{\gamma}^{<2>}(I)$ et montrer qu'elle fait intervenir les courbures de K_1 et K_2 en I ; vérifier que la mesure de cette différence (sur un axe que l'on précisera) s'exprime en fonction de f, f_1, θ'.

QUESTION 5.

On impose que la trajectoire H_1 de I dans le repère <1> soit la courbe définie en coordonnées polaires (r, θ) d'axe polaire $(O_1|\vec{I}_1)$ par

$$r = \frac{h(1 - e^2)}{2\,(1 - e\cos\theta)} \; ; \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

e nombre invariable donné : $0 < e < 1$; avec la notation de la question 4, on voit que $\theta_m = \pi$ et que la courbe H_1 est constituée d'un seul arc symétrique par rapport à $(O_1|\vec{I}_1)$

a) Dessiner H_1.

b) Déterminer et tracer la trajectoire H_2 de I dans <2> ; on donne $\alpha_1(0) = -\pi$, $\alpha_1(T) = 0$; $\alpha_2(0) = \pi$, $\alpha_2(T) = 0$.

La détermination demandée peut se faire en utilisant le changement de variable $\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = u$.

c) On définit les points F_1 et F_2 par :

$\overrightarrow{O_1F_1} = he\,\vec{I}_1$; $\overrightarrow{O_2F_2} = he\,\vec{I}_2$

Evaluer $\overrightarrow{F_1F_2}$ et calculer $\overrightarrow{F_1F_2}^2$; après avoir vérifié que $\overrightarrow{F_1F_2}^2$ est invariable, on effectuera une figure de l'ensemble des courbes H_1, H_2 a une date t de l'intervalle (0, T).

d) Exprimer, en fonction de θ et θ', la vitesse angulaire de $\overrightarrow{F_1F_2}$ par rapport à <0>.

e) On suppose que :

les barres O_1F_1, F_1F_2, F_2O_2 sont matérialisées, F_1F_2 étant de masse négligeable devant la masse m de chacune des barres O_1F_1 et F_2O_2 ;

les liaisons en O_1, F_1, F_2 et O_2 sont parfaites ;

le repère <0> est galiléen.

Déterminer l'équation différentielle du second ordre reliant (θ, θ', θ") dans le cas où l'on applique un couple de moment $\Gamma\vec{k}$ à l'une des trois barres de ce système.

On examinera les trois cas possibles : application à la barre O_1F_1, application à la barre F_2O_2, application à la barre F_1F_2.

FIN